6.2. Krummlinige Koordinatentransformationen

Krummlinige Koordinatentransformationen

Wir wollen uns noch etwas genauer mit Koordinatentransformationen befassen, genauer mit <u>orthogonalen</u> Koordinatentransformationen. Dabei beschränken wir uns auf den $\mathbb{R}^3$.

<u>Def</u>: Es sei T eine eineindeutige, stetig diffbare Abbildung des Gebiets $D \subset \mathbb{R}^3$ auf $G \subset \mathbb{R}^3$. Wenn die Jakobi-Matrix $T'(u)$ überall in D regulär ist und die Spalten von $T'(u)$ für jedes $u \in D$ zueinander paarweise orthogonal sind, dann heißt T <u>orthogonale</u> (krummlinige) <u>Koordinatentransf.</u>

analoge Def für $D \subset \mathbb{R}^2$, $G \subset \mathbb{R}^2$.

Wir wollen schreiben

$$x = T(u) \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} x_1 &= T_1(u_1, u_2, u_3) \\ x_2 &= T_2(u_1, u_2, u_3) \\ x_3 &= T_3(u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

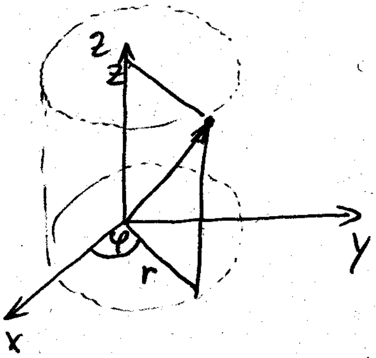
Dabei sind x_1, x_2, x_3 die "alten" (kartesischen) Koordinaten eines Punktes und u_1, u_2, u_3 die "neuen" (krummlinigen).

<u>Bezeichnung</u>: $$T_{u_i} = \begin{pmatrix} \partial T_1/\partial u_i \\ \partial T_2/\partial u_i \\ \partial T_3/\partial u_i \end{pmatrix} = i\text{-te Spalte von } T'(u)$$

<u>Beispiel</u>: Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned} \qquad r > 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}$$

Hier schreiben wir natürlich nicht u_1, u_2, u_3 usw., sondern r, φ, z



$$T_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad T_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Offenbar sind T_r, T_φ, T_z zueinander orthogonal, T definiert eine orthogonale Koordinatentransformation!

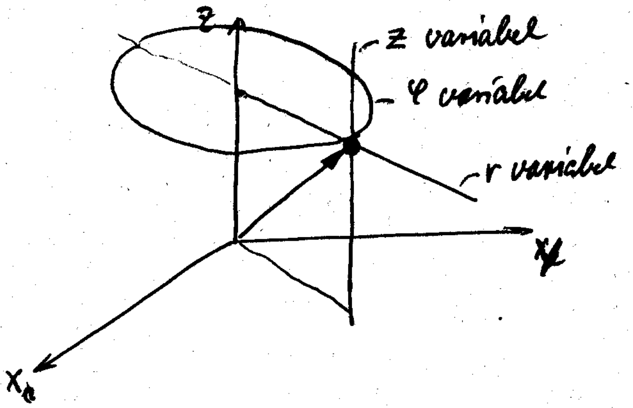
Def: Sei $x = T(u)$ fest vorgegebener Punkt. Die 3 Kurven

$$x(t) = T(t, u_2, u_3)$$
$$x(t) = T(u_1, t, u_2)$$
$$x(t) = T(u_1, u_2, t)$$

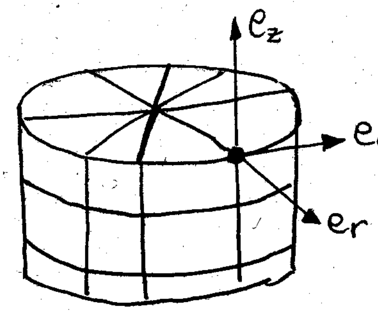
t variabel, so daß die entsprechenden Punkte in D liegen

heißen Koordinatenlinien.

Beispiel Zylinderkoordinaten



Damit wird G durch ein Netz von (krummen) Koordinatenlinien überzogen.



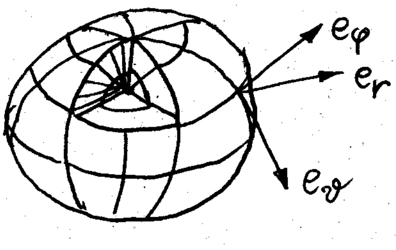
Nach unseren Voraussetzungen stehen die Vektoren $e_i = \frac{T_{u_i}}{|T_{u_i}|}$ aufeinander orthogonal und sind normiert. Gilt noch zusätzlich $\det T'(u) > 0 \ \forall u \in D$, dann ist $\det[e_1, e_2, e_3] = 1$ und diese Vektoren bilden ein orthonormales Rechtssystem. Nach obiger Def. sind e_1, e_2, e_3 auch die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien. Deshalb wird $\{e_1, e_2, e_3\}$ auch begleitendes (es hängt vom festen Punkt x ab!) (Rechts-) Dreibein genannt. → b.w.

Im Falle der Zylinderkoordinaten ergibt sich die rot eingezeichnete Konstellation.

Bsp: Kugelkoordinaten

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\vartheta$$

$r > 0, \ 0 < \vartheta < \pi,$
$0 \le \varphi < 2\pi$



$\{e_r, e_\vartheta, e_\varphi\}$ bilden Rechtssystem

In diesem RF!

Bemerkg: Man beachte den feinen Unterschied zur früher gegebenen Def!

<u>Bezeichnung</u> Zur Vereinfachung unserer Bezeichnungen schreiben wir

$$g_i = |T_{u_i}|$$

$$\Rightarrow \quad e_i = \frac{T_{u_i}}{g_i}, \quad i = 1,2,3$$

<u>Beispiel</u> Zylinderkoo.:

$$g_r = |T_r| = 1 \quad g_\varphi = |T_\varphi| = r \quad g_z = |T_z| = 1$$

$$\Rightarrow \quad e_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Bemerkung</u>: Der Fall der Polarkoo. ist über die ersten 2 Komp. immer mit abgehandelt!

Darstellung von Skalar- und Vektorfeldern in krummlinigen ~~Koor~~ orthogonalen Koordinaten

$V: G \to \mathbb{R}^3$ sei ein Vektorfeld, $\Psi: G \to \mathbb{R}$ Skalarfeld.

Durch Transformation T ergibt sich

$$V(x) = V(T(u)) = \tilde{V}(u)$$
$$\Psi(x) = \Psi(T(u)) = \tilde{\Psi}(u)$$

Offenbar bezeichnen V und $\tilde{V}$ den gleichen Punkt $\in \mathbb{R}^3$!

Nun sei <u>$u \in D$ fest gewählt</u>, e_1, e_2, e_3 das zugehörige begleitende Dreibein. (beachte: $e_i = e_i(u)$!)

Nun können wir $\tilde{V}$ bezüglich dieser e_i schreiben.

$$\boxed{\tilde{V} = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3 \qquad \text{mit } v^i = (\tilde{V}, e_i)}$$

<u>Def</u>: v^1, v^2, v^3 heißen <u>Komponenten</u> von v entlang der Koordinatenlinien, die obige Darstellung die <u>Darstellung von v in krummlinigen Koordinaten</u>.

<u>Bemerkung</u>: Da sowohl v^i als auch e_i von u abhängen, muß man bei partiellen Ableitungen darauf achten!

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_k}\left(V^i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial V^i}{\partial u_k} e_i + V^i \frac{\partial e_i}{\partial u_k} \right)$$

↑ Vektor!

Mit diesen Bezeichnungen ist es nun mit sinnvollem Aufwand möglich, die Differentialoperatoren grad, div, rot, Δ in krummlinigen Koordinaten darzustellen. Wir wollen dies nur am Gradienten diskutieren.

Lemma: Es gilt

$$\boxed{\nabla \psi(x) = \frac{e_1}{g_1} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_1} + \frac{e_2}{g_2} \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_2} + \frac{e_3}{g_3} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_3}} \quad (*)$$

Beweis: Wir multiplizieren (*) skalar mit e_i. Deshalb ist zu zeigen:

$$(\nabla \psi, e_i) = \frac{1}{g_i} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_i}$$

Wir wissen: $\frac{\partial x_k}{\partial u_i} = \frac{\partial T_k}{\partial u_i}$

$$\Rightarrow (\nabla \psi, e_i) = \cancel{\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \cdot \frac{1}{g_i}} = \left(\nabla \psi, \frac{1}{g_i} T_{u_i}\right)$$

$$= \frac{1}{g_i} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial T_k}{\partial u_i} = \frac{1}{g_i} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial u_i}$$

$$= \frac{1}{g_i} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_i}$$

nach der Formel für das vollständige Differential □

Kurz

$$\nabla_x = \frac{e_1}{g_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{e_2}{g_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{e_3}{g_3} \frac{\partial}{\partial u_3}$$

Beispiele

1° Gradient in Zylinderkoordinaten

$$\nabla \psi = \frac{e_r}{g_r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} + \frac{e_\varphi}{g_\varphi} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varphi} + \frac{e_z}{g_z} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \cdot e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} e_z$$

Die Formeln kann man dann jeweils anwenden, um

2° Gradient in Kugelkoordinaten

$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$
$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$
$z = r \cos\vartheta$

$$T_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad |T_r| = 1$$

$$T_\vartheta = r \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad |T_\vartheta| = r$$

$$T_\varphi = r \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |T_\varphi| = r\sin\vartheta$$

$$\Rightarrow e_r = T_r \;, \quad e_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\Psi = \frac{\partial\tilde\Psi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde\Psi}{\partial\vartheta} e_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\tilde\Psi}{\partial\varphi} e_\varphi}$$

Analoge, aber schwierigere Rechnungen beziehen sich auf div, rot, Δ. Wir verweisen auf die exzellente Darstellung in Burg / Haf / Wille "HM für Ing", Bd IV

Es gilt

$$\operatorname{div} V = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(g_2 g_3 V^1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(g_3 g_1 V^2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(g_1 g_2 V^3)\right]$$

$$\operatorname{rot} V = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\begin{vmatrix} g_1 e_1 & g_2 e_2 & g_3 e_3 \\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3 \\ g_1 V^1 & g_2 V^2 & g_3 V^3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta\Psi = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{g_1 g_2 g_3}{g_i^2}\frac{\partial\tilde\Psi}{\partial u_i}\right).$$

Die Formeln kann man dann jeweils anwenden, um die in Formelsammlungen angeführten Darstellungen zu berechnen (herzuleiten).

Natürlich kann man solche Darstellungen auch direkt, ohne Zuhilfenahme der allgemeinen Formeln zeigen:

<u>Bsp:</u> Gradient in Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$\nabla\psi = \begin{pmatrix} \partial\psi/\partial x \\ \partial\psi/\partial y \end{pmatrix}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow r_x = \frac{x}{\sqrt{}} = \frac{r\cos\varphi}{r} = \cos\varphi$

$r_y = \quad \ldots \quad = \sin\varphi$

$\varphi = \arctan\frac{y}{x} \Rightarrow \varphi_x = \frac{1}{1+(\frac{y^2}{x^2})}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin\varphi}{r}$

$\varphi_y = \frac{1}{1+(\,)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi}{r}$

Mit Hilfe unserer Kenntnisse aus dem Abschnitt Koordinatentransformationen erhalten wir

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot \overset{r_x}{\overset{\shortparallel}{\cos\varphi}} + \overbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}(-\sin\varphi)}^{\varphi_x}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot \underset{r_\varphi}{\underset{\shortparallel}{\sin\varphi}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}}_{=e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\underbrace{\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}}_{e_\varphi}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\partial\psi}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}e_\varphi}}$$

<u>Nochmals:</u>

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial U}{\partial r}\cos\varphi + \frac{\partial U}{\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\sin\varphi + \frac{\partial U}{\partial\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}$$

$\Rightarrow$ vektoriell geschrieben

$$\operatorname{grad} U = \begin{pmatrix}U_x\\ U_y\end{pmatrix} = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$
$$= \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$